4. CAMBIOS DE VARIABLES, INTEGRALES IMPROPIAS Y APLICACIONES

4.2. El teorema del cambio de variable para integrales triples

Teorema del cambio de variable en el plano

Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ compacto y $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto con $D \subset \Omega$. Sea $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $\varphi(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$, con derivadas parciales continuas, inyectiva en $\overset{\circ}{D}$ y tal que $\varphi^{-1} : \varphi(D) \longrightarrow D$ tiene derivadas parciales continuas. Entonces, si f es integrable sobre $\varphi(D)$, la función $(f \circ \varphi) \cdot |J_\varphi|$ es integrable sobre D y

$$\iiint_{\varphi(D)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_D f\left(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right) \cdot |J_\varphi(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

donde J_φ es el Jacobiano de φ, es decir

$$J_\varphi(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Observaciones

1. La fórmula del cambio de variable sigue siendo válida aunque la inyectividad de φ falle en un conjunto de contenido nulo en $\mathbb{R}^3$.
2. El cambio de variable es procedente cuando se simplifica el recinto o la función.
3. El teorema del cambio de variable se generaliza igual al caso de $\mathbb{R}^n$, $n > 3$.

Algunos cambios de variable usuales

1. **Coordenadas cilíndricas:** Consiste en aplicar coordenadas polares en uno de los planos (por ejemplo XY) y mantener intacta la tercera variable. Es decir

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} 0 \le \rho < \infty \\ 0 \le \theta < 2\pi \end{cases} \quad ; \quad |J\varphi| = \rho$$

   Transforma $[0,\infty) \times [0,2\pi) \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$, siendo inyectiva en $(0,\infty) \times [0,2\pi) \times \mathbb{R}$

2. **Coordenadas esféricas:**

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\psi \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\psi \\ z = \rho\cos\psi \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} 0 \le \rho < \infty \\ 0 \le \theta < 2\pi \\ 0 \le \psi \le \pi \end{cases} \quad ; \quad |J\varphi| = \rho^2\,\mathrm{sen}\,\psi$$

   Transforma $[0,\infty) \times [0,2\pi) \times [0,\pi]$ en $\mathbb{R}^3$, siendo inyectiva en $(0,\infty) \times [0,2\pi) \times (0,\pi))$

Ejemplos

1. Utiliza coordenadas cilíndricas para hallar la siguiente integral iterada:

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz \quad , \qquad a > 0$$

2. Halla el volumen del recinto $D \subset \mathbb{R}^3$ acotado por las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ y $x^2 + y^2 = z^2$, y que contiene al punto $(0,0,R)$ en su interior.
3. Halla el volumen del recinto acotado por la superficie $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$, $a > 0$.
4. Halla el volumen del recinto D del ejemplo 2.

Ejercicios

1. Halla las siguientes integrales triples:

(a) $\iiint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, donde $D \subset \mathbb{R}^3$ es el recinto acotado limitado por el paraboloide $x^2+y^2=2z$ y por el plano $z=2$.

(b) $\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$, donde V es el recinto interior a la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y al cono $x^2+y^2=z^2$ en el semiespacio $z \geq 0$.

(c) $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, donde $D \subset \mathbb{R}^3$ es el recinto acotado limitado por la superficie $x^2+y^2=z(1-z)$.

2. Calcula el volumen del sólido limitado por la superficie $(x^2+y^2+z^2)^2 = 2z(x^2+y^2)$.

Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

1. **(a)** $\frac{16\pi}{3}$; **(b)** $\frac{\pi}{8}$; **(c)** $\frac{\pi^2}{64}$.
2. $\frac{2\pi}{15}$.